

A GEOMETRIA ELÍPTICA OU GEOMETRIA RIEMANNIANA

Rodrigo dos Anjos Azevedo¹
Paulo Roberto de Azevedo Souza²
rodrigoscns@yahoo.com.br

RESUMO:

A importância das Geometrias não Euclidianas é abordada enfaticamente nos PCNs (Parâmetros Curriculares Nacionais). Será feito agora um pequeno tratamento a respeito da Geometria Elíptica, onde será mencionado alguns matemáticos que deram importantes contribuições para o surgimento e desenvolvimento da mesma, além dos modelos que poderão ser usados para o estudo dessa Geometria.

O grande interesse na abordagem do tema é pra mostrar que Geometria Euclidiana não é única e universal, daí, o tangenciamento no tema até então pouquíssimo explorado nos diversos níveis de Ensino no País. Também apresentaremos uma comparação entre a Geometria Euclidiana, a Geometria Hiperbólica e a Geometria Elíptica.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática; Geometria não Euclidianas; Geometria Elíptica; Geometria Hiperbólica.

1. INTRODUÇÃO

O surgimento da Geometria Elíptica ocorreu em 1854 durante um evento Acadêmico na Universidade de Göttingen no qual um jovem pesquisador se aventurou na extrapolação dos estudos sobre a Geometria Euclidiana usual. Seu nome era Georg Bernhard RIEMANN (1826-1866) e seu objetivo era o de obter a qualificação necessária a fim de se tornar Professor Universitário.

Riemann foi ousado e corajoso ao enfrentar o tema escolhido por sua banca examinadora, que continha nomes de peso como, por exemplo, Carl GAUSS (1777-1855). Ainda naquela época, havia a vontade entre os matemáticos de se demonstrar o Quinto Postulado de Euclides a partir dos outros quatro postulados, apesar de já em 1830 ter havido a chamada Geometria Hiperbólica de Lobachevsky e Bolyai.

Sobre Lobachevsky, já se falou um pouco, agora com relação a János Bolyai pode-se dizer que foi uma criança prodígio. Filho do matemático húngaro Farkas Bolyai (1775 – 1856), Farkas Bolyai era amigo pessoal de Gauss.

¹ Graduado em Ciências com Habilitação Plena em Matemática, Especialista em Instrumentação para o Ensino da Matemática, Mestre em Matemática e professor da Univértix Três Rios.

² Analista de Sistemas, Especialista em Psicopedagogia e Tecnologias da Informação Aplicadas à Educação, Mestre em Informática e professor da Univértix Três Rios.



Figura 1: Foto de Farkas Bolyai.

Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/Farks-Bolyai>

János Bolyai teve toda a sua infância voltada para o aprendizado da Matemática. Tendo seu pai como Professor desse assunto, aos treze anos János Bolyai já dominava todo o cálculo e várias formas de Mecânica Analítica.

Em 1832, após cinco anos de estudos, Bolyai publicou os resultados de sua pesquisa sobre Geometrias Não-Euclidianas como um apêndice a um trabalho volumoso de seu pai, o matemático Farkas Bolyai.

Bolyai teve uma vida dura. Ele morreu em 1860 e a cerimônia de seu enterro parecia um ritual de esquecimento. Apenas três pessoas estiveram presentes para ver seus restos mortais serem colocados em um túmulo coletivo sem lápide. O registro de sua morte na igreja dizia apenas: "Sua vida passou inutilmente".

Curiosamente, Bolyai nunca publicou seus trabalhos exceto algumas poucas páginas no apêndice do livro de seu pai. No entanto, ele deixou mais de 20000 páginas de manuscritos de trabalhos sobre Matemática desenvolvidos por ele até a sua morte.



János Bolyai (1802 - 1860)

Figura 2: Foto de János Bolyai.

Fonte: <http://www.miniweb.com.br/ciencias/artigos/a-geometria-dos-espacos-curvos.pdf>

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 UMA BREVE REVISÃO DE LITERATURA

Havia um problema fundamental neste contexto, e este era o fato de que não havia um modelo dessa Geometria, única maneira de garantir que não se poderia achar alguma contradição nas construções de Lobachevsky e Bolyai. Ao se acessar as conclusões obtidas por Gauss em muitos de seus *papers* percebe-se que ele acreditava que uma superfície de curvatura negativa constante, como mostra a figura abaixo, poderia ser assumida como um modelo, mas a curvatura em um ponto é o produto da maior pela menor das curvaturas de todas as curvas da superfície que passam pelo ponto.

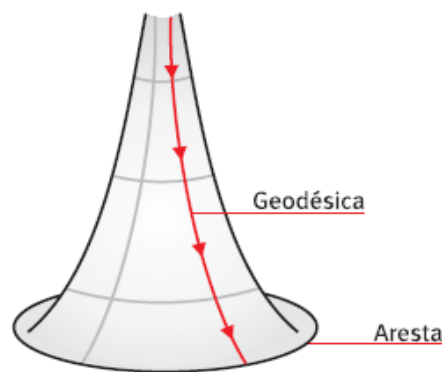


Figura 3: Uma Superfície de curvatura negativa constante. A geodésica indicada não pode ser prolongada além da aresta e isso contradiz o segundo postulado de Euclides.

Conforme visto acima, o modelo de Beltrami possuía um defeito. As superfícies de curvatura negativa constante, conhecidas na época possuíam arestas, o que impedia o prolongamento de certas geodésicas. Hoje se sabe que nas superfícies de curvatura constante positiva, as curvas geodésicas são as retas de uma Geometria Não-Euclidiana na qual vale a hipótese do ângulo obtuso. Essa Geometria pode ser imaginada na esfera em que as retas são os círculos máximos.

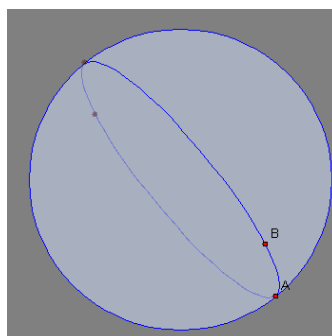


Figura 4: Esfera com círculo máximo.

Agora sobre outro matemático supracitado e citado no capítulo anterior também, cujo nome é Carl Friedrich Gauss pode-se dizer que foi o maior matemático de sua época, considerado o príncipe dos matemáticos. Foi menino prodígio, já aos dez anos de idade, ainda na escola elementar, Gauss mostrou seu potencial matemático ao demonstrar quase imediatamente para seus Professores a soma dos números inteiros de 1 a 100 notando que isso representava a soma de 50 pares de números e que a soma dos números de cada par dava sempre o resultado 101.

Desde o início dos anos de 1800, Gauss começou a se interessar pela questão da possível existência de Geometrias Não-Euclidianas. Sabe-se a partir dos seus livros de anotações que Gauss desenvolveu partes de uma Nova Geometria, que não era a Euclidiana, já nos anos de 1820. No entanto, Gauss sabia que a existência de uma Geometria Não-Euclidiana faria uma perturbação imensa na Matemática. Mais ainda, ele notou que a reação de seus colegas a essa descoberta, e a qualquer um que a apoiasse publicamente, seria extremamente dura. Desse modo Gauss preferiu manter seu status social e não divulgou os resultados de sua pesquisa. Deve ficar claro, entretanto, que Gauss não se acovardou cientificamente. Ele manteve correspondência sobre o assunto com vários matemáticos de sua época, embora sem adaptar seu extenso trabalho para a forma de artigo científico.

Gauss também demonstrou grande interesse na chamada Geometria Diferencial. Ele publicou vários artigos sobre esse assunto e em 1828 apresentou um dos seus mais importantes artigos onde estava contido o famoso "Teorema Egregium" um resultado fundamental em Geometria Diferencial que trata da curvatura de superfícies, além de importantes ideias geométricas tais como a da curvatura Gaussiana, que não serão tratadas nesse trabalho.



Figura 5: Foto de Gauss.

Fonte: <http://pt.wikipedia.org/wiki/gauss>

No entanto, todos os exemplos dessas superfícies têm pontas ou arestas o que contradiz o segundo postulado de Euclides. Então, é aqui, neste ponto que se situa o trabalho de Riemann. Lançando mão de uma linguagem espartana, sem definições precisas nem demonstrações cuidadosas, Riemann, durante sua dissertação em 1854, introduziu o que hoje é chamado de variedade de dimensão n (um objeto que generaliza a noção de superfície para qualquer dimensão e sem menção a um espaço ambiente) e postulou que uma Geometria era um modo de medir comprimentos em uma tal variedade. A partir daí, são definidas as curvas “mais curtas entre pontos próximos”, chamadas geodésicas, que irão desempenhar o papel de retas nesta Geometria, por exemplo, ilustrado pela figura que representa um postulado desse tipo de Geometria:

“Quaisquer duas retas em um plano têm um ponto de encontro”

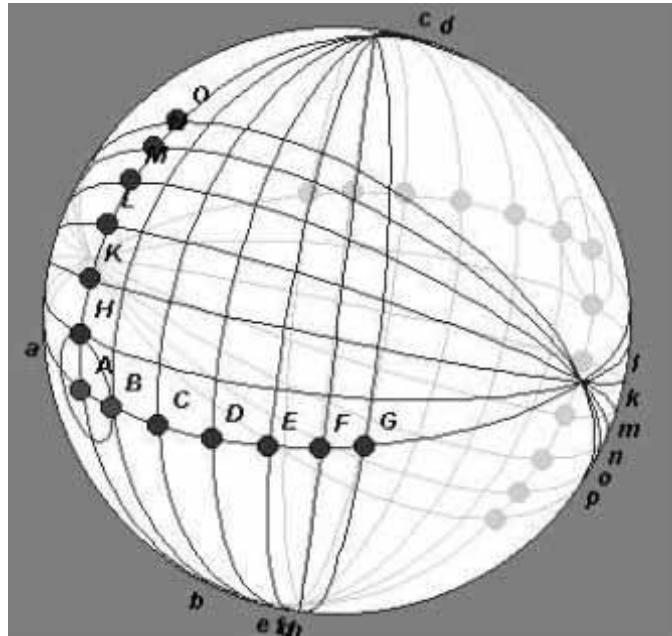


Figura 6: Linhas Geodésicas na esfera.

Gauss havia provado que a curvatura de uma superfície dependia apenas de medidas feitas sobre ela. Riemann, então, aproveitou esse fato e, levando em conta que a Geometria por ele definida dependia de medidas feitas na variedade, definiu a curvatura de uma variedade de tal modo que a curvatura de uma superfície passou a ser um caso particular de noção de curvatura de uma variedade de Riemann.

O caso mais simples dessa situação é o espaço euclidiano usual, no qual as geodésicas são retas, e a curvatura é identicamente zero. Riemann afirmou – mas não provou – que se a curvatura é zero por toda parte, então a variedade é local, isto é, nas proximidades de um ponto o espaço euclidiano usual.

Um grande passo para o desenvolvimento da Geometria Não-Euclidiana foi feito por esse matemático alemão Georg Friedrich Bernhard Riemann. Para obter uma posição de Professor Assistente na Universidade de Göttingen Riemann tinha que fazer uma palestra que serviria como teste. Seguindo o procedimento existente ele apresentou ao departamento três tópicos para que fosse escolhido o seu assunto de palestra. Dois desses tópicos versavam sobre problemas correntes entre os matemáticos da época, enquanto que o terceiro estava voltado para os fundamentos da Geometria. Embora esse último assunto fosse o menos preparado por Riemann, Gauss o escolheu querendo saber como um jovem matemático trataria tema tão difícil.

Riemann deu sua palestra sobre esse tema, que mais tarde foi publicada com o título de "Sobre as Hipóteses Subjacentes aos fundamentos da Geometria", com

sucesso absoluto. Após o término da palestra Gauss permaneceu em silêncio e então levou Riemann aos céus, algo bastante raro de ser feito por ele.

Gauss ficou impressionado pela abordagem feita por Riemann para a Geometria Não-Euclidiana pelo fato de que ela era bem diferente daquelas apresentadas por seus antecessores. Aparentemente Riemann não sabia nada sobre os trabalhos de Lobachevski e Bolyai e tinha somente uma vaga ideia do interesse de Gauss pelo assunto. O sucesso de Riemann se deve ao fato dele ter incorporado em seu estudo duas ideias extremamente férteis: o aparato matemático de Gauss para descrever a Geometria de Superfícies Curvas Bidimensionais e seu próprio novo conceito de Variedade Multidimensional, ou seja, objetos geométricos com múltiplas dimensões.

Uma superfície é uma variedade bidimensional, um espaço é uma variedade tridimensional, etc. Como essa é a única diferença entre elas todas as ideias e métodos usados para descrever superfícies bidimensionais podem ser agora diretamente aplicados a espaços curvos tridimensionais. Entre as noções usadas a mais importante é aquela de métrica, ou seja, a forma quadrática para as diferenças entre coordenadas que descreve o comprimento do intervalo entre dois pontos vizinhos em uma variedade curva, esses temas não serão tratados nesse trabalho.

2.2 GEOMETRIA RIEMANNIANA

A Geometria Riemanniana é uma Geometria Não-Euclidiana de espaços de curvatura constante positiva. A propriedade essencial desse espaço tridimensional é que seu volume é finito de modo que se um ponto se move sobre ela na mesma direção ele pode certamente retornar ao ponto de partida. Como se vê abaixo, em vez das linhas retas da Geometria Euclidiana na Geometria Esférica Riemanniana temos geodésicas, ou seja, os arcos dos grandes círculos que podem ser traçados sobre a esfera.

A partir de uma ilustração bidimensional da Geometria sobre a Esfera, mostrada a seguir, é claro que a noção de linhas paralelas como dada pelo quinto postulado de Euclides neste caso não tem qualquer sentido, pois qualquer arco de um grande círculo que passa através de um ponto C, não situado sobre AB, necessariamente irá intersectar AB e até mesmo em dois pontos. A figura também mostra que a soma dos ângulos de um triângulo formado por três arcos que se intersectam de três grandes círculos é sempre maior do que 180° . Essa bem-

sucedida integração de ideias permitiu que Riemann avançasse ao construir tantos casos particulares de Espaços Não-Euclidianos como uma teoria de espaços arbitrariamente curvos. Em primeiro lugar Riemann descobriu uma Geometria Esférica que era oposta à Geometria Hiperbólica de Lobachevsky. Deste modo ele foi o primeiro a indicar a possibilidade de existir um espaço geométrico finito. A ideia logo se firmou e trouxe a questão de se o nosso espaço físico era finito. Além disso, Riemann teve a coragem de construir Geometrias muito mais gerais do que a de Euclides e mesmo as aproximadamente Não-Euclidianas conhecidas.

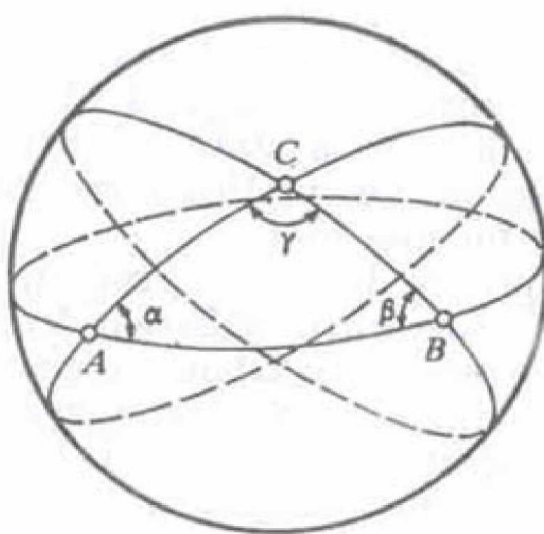
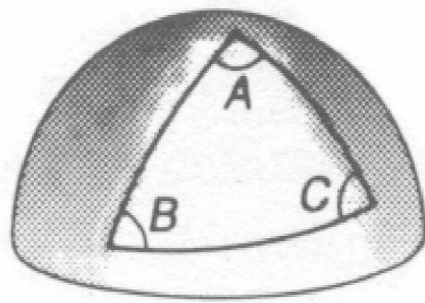


Figura 8: Triângulo ABC com indicação de seus ângulos na esfera.

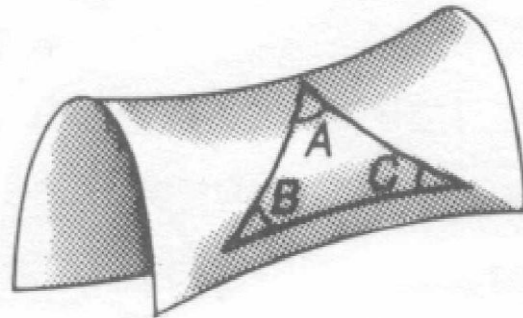
Desse modo a Geometria Euclidiana é apenas uma entre as Geometrias de Riemann e, é possível provar, como Gauss havia previsto, que as variedades de curvatura negativa constante fornecem modelos para Geometrias que não satisfazem o Quinto Postulado de Euclides.

Curvatura Positiva



$$A+B+C > 180^\circ$$

Curvatura Negativa



$$A+B+C < 180^\circ$$

Figura 9: Triângulos desenhados em superfícies de curvaturas positiva e negativa, respectivamente.

Entre os modelos de Geometria Elíptica (Geometria Projetiva, Estereográfica, hiperesférica, etc.) esse trabalho será limitado a esse tipo especial, que facilita a visualização, ou seja, a Geometria Esférica, onde as retas são as *Geodésicas* ou *Círculos Máximos* da superfície e, serão dadas a seguir algumas importantes conclusões tiradas dessa Geometria Elíptica:

- I) Uma “reta” nessa geometria é ilimitada, mas não é infinita;
- II) Por um ponto P qualquer, fora de uma reta L, não passa nenhuma paralela a L;
- III) A soma dos ângulos internos de um triângulo na Geometria elíptica não é constante, mas, é maior que 180° ;
- IV) Os lados de um triângulo são ângulos com vértices no centro da esfera e são medidos em graus;
- V) A soma dos ângulos internos de um quadrilátero é maior do que 360° ;
- VI) A classificação dos triângulos quanto aos ângulos é dada devido a quantidade de ângulos retos que eles têm um, dois ou três, tendo os nomes de retângulo, bi retângulo e tri retângulo, respectivamente;
- VII) A classificação dos triângulos quanto aos lados será retilátero, birretilátero ou trirretilátero, caso tenha um lado, dois lados ou três lados medindo 90° respectivamente.



Figura 10: Professor exibindo uma das proposições anteriores.

A audaciosa concepção de Riemann não foi bem entendida em sua época, e só lentamente se desenvolveu e hoje é chamada Geometria Riemanniana. Um dos pontos importantes nesse desenvolvimento foi a Teoria da Relatividade Geral do físico alemão Albert EINSTEIN (1879-1955), de 1916, que utilizou a linguagem introduzida por Riemann e por seus sucessores – especialmente, os matemáticos alemães Elwin CRISTOFFEL (1829-1900) e Wilhelm KILLING (1853-1925).

Apesar da natural tendência em se discutir qual modelo de Geometria é mais viável para se representar o nosso universo, o fato é que a Geometria de Riemann se consolidou como uma teoria consistente e totalmente aceita pela comunidade acadêmica sendo rotineiramente aplicada nos mais diversos ramos da atividade humana como, por exemplo, na navegação marítima, aérea etc.

3. METODOLOGIA

Este trabalho se caracteriza essencialmente pelo estudo de teorias em torno dos descritores a seguir: Geometria não Euclidianas; Geometria Elíptica; Geometria Hiperbólica. A pesquisa se encontra na fase preliminar. Nossa finalidade explorar

mais informações sobre o assunto e, principalmente, sobre o objeto de estudo: “A geometria elíptica ou Geometria Riemanniana”.

Segundo Gil (2002) é desenvolvido a pesquisa bibliográfica a partir de material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos buscando conhecimento e informações científicas a respeito desse artigo.

. “A Revisão Bibliográfica é parte de um projeto de pesquisa, que revela explicitamente o universo de contribuições científicas de autores sobre um tema específico.” (SANTOS e CANDELORO, 2006, p. 43).

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

4.1 COMPARAÇÃO ENTRE AS GEOMETRIAS NÃO-EUCLIDIANAS

Uma maneira prática pela qual pode-se fazer distinção entre essas três Geometrias é a seguinte: Pegar uma folha de papel e colocá-la sobre uma superfície plana. O papel irá cobrir a superfície suavemente. Tentar agora, com uma folha de papel de mesmo tamanho cobrir uma superfície esférica. Será possível perceber que, para cobri-la, terá que se permitir que surjam vincos no papel. Isso indica que próximo a qualquer ponto dado sobre a superfície da esfera a área do papel é maior do que a área que se está tentando cobrir. Quando se tenta cobrir a superfície de uma sela com a mesma folha de papel o que ocorrerá será a situação inversa: a área do papel passa a ser insuficiente para cobrir a superfície próxima a qualquer ponto sobre ele e o papel se rasga.

Comparandos os três espaços uniformes	
espaço euclidiano	através de um ponto dado podemos traçar somente uma paralela a uma linha reta.
	a soma dos ângulos interiores de um triângulo é igual a dois ângulos retos.
	a circunferência de um círculo é igual a π vezes o seu diâmetro.
espaço esférico	através de um ponto dado não podemos traçar nenhuma paralela a um ponto dado.
	a soma dos ângulos interiores de um triângulo é maior do que dois ângulos retos.
	a circunferência de um círculo é menor do que π vezes o seu diâmetro.
espaço hiperbólico	através de um ponto dado podemos traçar mais de uma paralela a uma linha reta.
	a soma dos ângulos interiores de um triângulo é menor do que dois ângulos retos.
	a circunferência de um círculo é maior do que π vezes o seu diâmetro.

Figura 14: Quadro comparativo entre três modelos de Geometria.

Outro fato interessante a se considerar é que a palavra “hipérbole” vem do grego, significando excesso, já a palavra “elipse” significa deficiência e a palavra “parábola” significa sendo “paralela a”. Daí, é pensável que a Geometria Hiperbólica é aquela que possui um excesso de paralelas, já que podem existir infinitas, e na elíptica existe uma deficiência dessas paralelas, pois não há nenhuma reta paralela, ambas quando comparadas com a Geometria Euclidiana.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Sobre qual das Geometrias é preferível para o mundo físico, Gauss tentou resolver esse problema através de uma experiência medindo os ângulos de um triângulo formado por três picos de montanhas bem afastadas e dentro dos limites de erros experimentais, resultaram no famoso 180° da Geometria Euclidiana. Portanto, não se pode nem afirmar nem negar que a Geometria Euclidiana corresponde à realidade, pois quando as referências tomadas estão muito distantes, as diferenças entre essas Geometrias tornam-se significativas. Agora para distâncias muito pequenas as três Geometrias acabam tendo uma convergência de resultados e a preferência pela Geometria Euclidiana é dada por ela ser a mais simples dessas três Geometrias.

No entanto, uma ótima lição deixada por essas novas Geometrias foi a influência deixada sobre a concepção matemática no século XX, pois ficou claro que numa teoria todos os seus elementos devem ser cuidadosamente analisados, com a necessidade do rigor matemático em todas as suas demonstrações não devendo se ficar preso a certos apelos intuitivos da teoria.

6. REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag , SILVA, Maria José Ferreira da, HARUNA, Nancy Cury Andraus. **Relato de experiência: Fundamentos metodológicos de formação de professores em Geometria**. Catanduva, SP, 2004.

ALVES, S. (2007). **A Geometria do Globo Terrestre**. In: Programa de Iniciação Científica da OBMEP, v 6.

ARCARI, I. **Um texto de Geometria Hiperbólica**. Dissertação de Mestrado. Campinas, São Paulo, 2008.

ATIKE, Roberta Godoi. **Geometria**. Universidade de São Paulo. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Carlos: USP, 2006. Disponível em: <http://www.icmc.sc.usp.br/~wik/geometria/apostila.pdf>. Acesso: em: maio de 2019.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Publicações Matemáticas – Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro, IMPA, 2002.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2a edição, tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3o e 4o ciclos do ensino fundamental)**. Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III e Parte IV**. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) + Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+)** - Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

CARMO, Manfredo do. **Elementos de Geometria Diferencial, Projeto Euclides, IMPA**, Rio de Janeiro.

CARMO, Manfredo do. **Geometria Riemanniana, Projeto Euclides, IMPA**, Rio de Janeiro.

COSTA, Celso e CARDIM, Nancy. **Tópicos de Aritmética, Álgebra e Geometria para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

COSTA, Celso e FIGUEIREDO, Luiz Manoel Silva de. **Instrumentação para o Ensino da Geometria**. Rio de Janeiro. UFF/CEP, 2007.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às Geometrias não Euclidianas**. 1a ed. São Paulo. Interciência, 2001. 116 p.

DEVITO, André et al. **Geometrias não Euclidianas**. Universidade de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas. Campinas, 2006. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao_euclidiana. Acesso em: maio 2019.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

GAIOWSKI, Antônio Osny e Bassoi, Tânia Stella. A inserção das Geometrias não Euclidianas no currículo da Educação Básica no estado do Paraná. Disponível em:

<http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/848-4.pdf>. Acesso em: maio de 2019.

GIL, Antônio Carlos. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. São Paulo: Atlas, 2002.

GREENBERG, M. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries**, Freeman and Co., San Francisco, 1974.

KALEFF, A. M. M. R. (2004). **Atividades Introdutórias às Geometrias não Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi**. Boletim – GEPEM, Rio de Janeiro, n o 44, p. 11- 42.

KALLEF, Ana Maria Martensen Roland. **Tópicos em Ensino de Geometria**. Rio de Janeiro: UFF, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Revista Matemática Universitária**. no 6. Rio de Janeiro: SBM, dezembro de 1987, pp 25 – 48.

MOREIRA, Ana Cláudia da Silva. **Geometrias sobre a axiomática de Hilbert**. Campinas, 2006. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/eliane/ma241/trabalhos/sobhilbert.pdf>. Acesso em: maio de 2019.

OLIVERO, Mário. **História da Matemática através de problemas**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

PETIT, J.P. **As aventuras de Anselmo Curioso**. Os mistérios da Geometria. Lisboa: Dom Quixote, 1982.

SANTOS, Vanice, e CANDELORO, Rosana Jardim. **Trabalhos acadêmicos: uma orientação para a pesquisa e normas técnicas**. Porto Alegre: AGE, 2006.

SILVA, Sergio. **A Polêmica sobre o Axioma das Paralelas**. Disponível em: http://www.ginasiomental.com/artigos/pol_paral.pdf. Acesso em: maio de 2019.

STRIJK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Ciência Aberta. Gradiva, 1997.