

O APARECIMENTO DE NOVAS GEOMETRIAS

Rodrigo dos Anjos Azevedo¹
Rita de Cássia Teixeira Assis²

rodrigoscns@yahoo.com.br

RESUMO:

O ensino de Matemática vive hoje um paradoxo. Ao mesmo tempo em que a sociedade pleiteia e justifica a sua presença de uma forma marcante nos currículos escolares, reivindicação esta, amparada na crença de que é uma cadeira do conhecimento fundamental para o progresso da Ciência e Tecnologia, percebe-se que a maioria dos conteúdos ensinados é considerada desinteressante e inútil, não estando vinculado diretamente à realidade. Em contrapartida, esse estudo vem discutir e apresentar a importância do conhecimento matemático, em especial dos itens relacionados à geometria.

PALAVRAS-CHAVE: Matemática; Ensino; Elementos geométricos.

1. INTRODUÇÃO

Quando se fala em Geometria, em geral é pensado naquela que se estuda na Educação Básica, com seu feto, estabelecida inicialmente na Grécia, e divulgada através de uma obra de Euclides chamada “Os Elementos”. A respeito de conhecimento, até 300 a.C., Atenas figurava como maior Polo Cultural da Antiguidade, mas essa prioridade veio a passar para uma cidade africana, localizada no Egito e chamada de Alexandria que abrigou a maior biblioteca daquela época. Ela chegou a ter em seu acervo mais de 600000 rolos de papiro, uma verdadeira papiroteca.

Essa Geometria florescida nessa era de Ouro da Antiga Grécia é chamada Euclidiana e é a estudada na Educação Básica (ensinos fundamental e médio) e usada para visualizar o espaço físico. Ela consiste de afirmações, ditos teoremas ou corolários, que são demonstrados através de deduções lógicas a partir de outras afirmações, os axiomas ou postulados. Euclides usou cinco desses postulados como alicerces para erguer sua Geometria. No entanto, existem Geometrias alternativas a

¹ Graduado em Ciências; Especialista em Instrumentação para o Ensino da Matemática; Mestre em Matemática; Professor da Faculdade Vértix TR – UNIVÉRTIX.

² Graduada em Engenharia Civil; Especialista em Docência do Ensino Superior; Professora da Faculdade Vértix TR – UNIVÉRTIX.

esta, denominadas Geometrias não Euclidianas que são, por natureza, muito mais complexas e abrangentes que a primeira.

Mas como tais tipos de Geometria foram tomando forma, se apresentando e reclamando seus respectivos lugares entre as diversas cadeiras do conhecimento humano? A análise do desenvolvimento destas Geometrias ao longo do eixo da história serve para demonstrar de forma concisa e inquestionável como uma simples definição serviu de agente catalisador, interrogando e levando uma legião de matemáticos a expandir as fronteiras do conhecimento humano num lento processo que se estabeleceu por aproximadamente dois milênios. Esta descoberta poderia ter acontecido séculos antes caso não existissem os preconceitos de que a Geometria Euclidiana era a única possível e que era a Geometria do Universo. Um preconceito tão forte que provavelmente tenha impedido Gauss de publicar os próprios achados sobre o assunto. Assim, a descoberta dessas Novas Geometrias representa uma vitória contra uma concepção euclidiana do mundo.

Esse trabalho busca demonstrar, através de várias vertentes, que o estudo dos conceitos matemáticos, em particular os geométricos, constitui parte importante no processo de desenvolvimento cognitivo do ser humano. Isso ocorre porque faculta ao aluno desenvolver um tipo especial de pensamento que lhe permite compreender, descrever e representar de forma organizada, o mundo em que vive.

2. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A gênese das Geometrias que serão abordadas nesse trabalho nos leva ao passado, mais precisamente na Grécia Antiga, onde no Século III a.C. com a anexação deste País ao Império Macedônio, parte dos intelectuais gregos rumaram para Alexandria com o objetivo de se juntar aos quadros da Universidade que acabara de ser construída nesta metrópole e que abrigava a famosa biblioteca de Alexandria, a maior do mundo, já citada anteriormente.

Apesar do passado nebuloso e distante, um dos sábios gregos que atenderam ao chamado de Ptolomeu, então governante do Egito Antigo foi Euclides, provavelmente oriundo de Atenas e a cujo encargo ficou o Departamento de Matemática da nova Universidade. Homem de rica bagagem cultural, Euclides ficou imortalizado pela sua produção literária no campo da Matemática, em especial, pela obra Os Elementos que se tornou, sem dúvida, o vértice de todo o conhecimento matemático durante milênios.

Essa obra é composta de por treze livros abrangendo 465 proposições, os seis primeiros livros apresentam a Geometria Plana, o primeiro deles começa com 23 definições, seguidas de 5 postulados e mais 5 noções comuns que essencialmente estabelecem a existência de objetos matemáticos, e vão ditando as regras do jogo. Apesar de não haver um único manuscrito original, sua relevância cultural transcendeu os obstáculos do tempo. Nela, Euclides aborda questões introdutórias da Matemática em sua generalidade e não apenas da Geometria. Esse compilado em forma de linguagem discursiva e estruturada dos conhecimentos consensuais até então estabelecidos, tiveram a seguinte organização:

- * Livro I – Construções Elementares, Teoremas de Congruência, Área de Polígonos, Teorema de Pitágoras;
- * Livro II – Álgebra Geométrica;
- * Livro III – Geometria do Círculo;
- * Livro IV – Construções de Certos Polígonos Regulares;
- * Livro V – Teoria das Proporções de Eudoxo;
- * Livro VI – Figuras Semelhantes;
- * Livros VII, VIII e IX – Teoria dos Números;
- * Livro X – Classificação de Certos Números Irracionais;
- * Livro XI – Geometria no Espaço, Volumes Simples;
- * Livro XII – Áreas e Volumes Determinados pelo Método de “Exaustão” de Eudoxo;
- * Livro XIII – Construção dos Cinco Sólidos Regulares.

O êxito dos Elementos se deve à sua forma de apresentação de raciocínio encadeado, inaugurando o método postulacional ou axiomático, inter-relacionando todo o conteúdo teórico abordado. Apesar de não ser perfeito em toda a sua essência o episódio de elaboração do método serve para dar mostras da genialidade e pioneirismo do raciocínio de Euclides que, num universo onde o conhecimento não era conexo, tratou de redimensionar a forma de se pensar de toda uma civilização.

Sabendo que deveria haver um ponto de partida em seu método dedutivo, Euclides admite afirmações tidas como verdades absolutas o que não gera a necessidade de provas, ou seja, os chamados axiomas ou postulados e a partir dos quais todas as afirmações posteriores viriam a ser provadas.

Qualquer teoria que siga o modelo axiomático será tanto mais elegante quanto menor for o seu número de axiomas e estes devem ser escolhidos com a preocupação de que sejam consistentes, suficientes e independentes.

Pode-se afirmar que um rol de axiomas é consistente se não conduzir a teoremas conflitantes, ou seja, um teorema e à sua negação. Exemplificando: uma teoria que demonstre a infinitude dos números reais e, por outro lado, conduza à sua negação, não é consistente.

Um conjunto de axiomas é suficiente ou completo quando a teoria pode ser desenvolvida sem a necessidade de outros axiomas.

Os axiomas dizem-se independentes quando nenhum deles pode ser demonstrado a partir dos demais. Quando se verifica que um dos axiomas pode ser demonstrado a partir dos outros, tal axioma passa a ser um dos teoremas da teoria e, com isto, o conjunto de axiomas torna-se menor, o que é sempre louvável.

A Geometria de Euclides foi a primeira teoria dentro da Matemática a ser axiomatizada, por isso, muitas “pessoas” pensavam que apenas a Geometria possui teoremas. Desconhecem os famosos teoremas fundamentais do Cálculo, da Aritmética e da Álgebra, entre outros.

O método axiomático está completamente enraizado na forma de se propor Matemática atualmente, inclusive no ensino médio das escolas brasileiras, o que, apesar de nem sempre ser feito, constitui uma das observações fundamentais dos Parâmetros Curriculares Nacionais, em conformidade com as doutrinas do Ministério da Educação.

Por exemplo, a veracidade de algo em Matemática, vem interligada a uma combinação de deduções lógicas, daí, para se provar algum resultado teórico, é imprescindível uma sequência lógica de outras proposições já provadas anteriormente. Esse processo de provar em Matemática se tornaria uma tarefa demasiadamente trabalhosa e praticamente impossível de tanto que se teria que ficar voltando indefinidamente, isso é rompido quando se toma um determinado ponto de partida.

Esse ponto de partida, contém uma certa quantidade de afirmações, chamadas de postulados ou axiomas, que são as afirmações que devem ser aceitas como verdadeiras donde não se faz necessário prová-las. Quando um determinado campo é sustentado por essas verdades, de preferência poucas delas, com uma

certa simplicidade e bem evidentes, se diz que ele está apresentado de forma axiomática. Esse é o caso, por exemplo, da Geometria Euclidiana ou Clássica.

Então, é aqui que tudo tem início, pois no Livro I, de Os Elementos, conforme supracitado, este apresenta uma lista de 23 definições sem qualquer comentário, sendo as dez primeiras divididas em noções comuns (comuns a todas as cadeiras do conhecimento) e os postulados (inerentes a uma área específica do saber):

Noções Comuns:

- Coisas iguais a uma terceira são iguais, ente si;
- Se quantidades iguais são adicionadas a iguais, os totais são iguais;
- Se quantidades iguais são subtraídas de iguais, os restos são iguais;
- Coisas que coincidem uma com outra são iguais;
- O todo é maior que qualquer de suas partes.

Postulados:

- Pode-se traçar uma reta por quaisquer dois pontos;
- Pode-se continuar uma reta infinitamente;
- Pode-se descrever uma circunferência com qualquer centro e qualquer raio;
- Todos os ângulos retos são iguais.

Se uma reta corta duas outras retas formando ângulos colaterais internos cuja soma é menor que a soma de dois ângulos retos, então essas duas retas, se continuadas infinitamente, encontram-se no lado no qual estão os ângulos cuja soma é menor do que a soma desses dois ângulos retos.

É público e notório a diferença entre o quinto postulado e os demais. Este postulado foi o ponto de partida para todo o calvário que envolveu numerosos matemáticos, a maioria deles com o objetivo de provar que este postulado era na verdade um teorema, podendo então ser demonstrado a partir dos demais.

O que mais chama a atenção no quinto postulado diz respeito à sua formulação, uma vez que um postulado deveria ser enunciado de forma breve e simples, o que não é o caso. A sua veracidade jamais foi questionada, pelo menos até meados do século XIX. Provavelmente, isto pode ser explicado pelo fato de que duas retas acabariam por se encontrar, num ponto teórico, não havendo necessidade de ser construído, uma vez que sua existência estaria garantida

racionalmente. O que preocupava Euclides, não era, portanto, sua veracidade, mas sua praticidade.

O próprio Euclides pelo que parece, evitou ao máximo utilizá-lo em suas demonstrações, só o fazendo muito depois, na proposição de número 29 que diz: “Quando uma reta corta duas retas paralelas, ou seja, duas retas que não possuem pontos em comum, formam-se ângulos correspondentes iguais.” No entanto, muitos estudiosos afirmam que ele poderia ter aplicado o quinto postulado já na proposição 17 que diz: “Em qualquer triângulo a soma de quaisquer dois ângulos é menor que dois ângulos retos”.

A comunidade de matemáticos adotou então, dois caminhos alternativos ao quinto postulado também chamado de postulado das paralelas:

- Substituí-lo por outro mais auto-evidente, ou;
- Demonstrá-lo com os outros nove, mostrando com isso, não ser ele, independente.

Esta segunda alternativa se divide em duas:

1ª – Demonstrar o teorema a partir dos outros axiomas (método direto de prova);

2ª – Admitir o quinto postulado como um absurdo, ou seja, falso, tentando chegar a alguma contradição (método indireto).

Em relação ao primeiro caminho há uma variedade de opções, como, por exemplo, a alternativa dada por John Playfair (1748 – 1819) que foi um matemático e geólogo escocês, lecionava Matemática na faculdade de Edimburgo, essa formulação se tornou a mais comum nos livros de Geometria: “Por um ponto fora de uma reta dada não há mais que uma paralela a esta reta”.

A seguir outros postulados equivalentes ao quinto postulado de Euclides:

- Postulado A: a soma dos ângulos internos de um triângulo é sempre igual a soma de dois ângulos retos;
- Postulado B: existe um par de triângulos semelhantes e não congruentes;
- Postulado C: existe um par de retas equidistantes;
- Postulado D: se três dos quatro ângulos internos de um quadrilátero são retos, então o quarto ângulo interno também é um ângulo reto.

O axioma das paralelas não era tão simples quanto os outros postulados que nunca geraram questões filosóficas, sendo essencialmente auto-evidentes e em

geral não remetendo o pensamento à ideia de infinito. Assim, havia um problema no sistema de Euclides: suas “evidências” não eram tão evidentes. Para muitos, o quinto postulado, tratava-se, muito provavelmente, não de um verdadeiro postulado, mas sim de um teorema, e como tal deveria ser demonstrado dentro da própria Geometria, utilizando-se apenas dos quatro primeiros postulados e o conjunto de definições fixado. Nesta tarefa, a de provar o quinto postulado de Euclides, envolveu-se uma quantidade numerosa de matemáticos durante mais de dois mil anos.

Existem tentativas de provas de todos os tipos, desde as mais simples que foram facilmente refutadas, até as mais elaboradas que, no início do século XIX, apareceram na Europa e necessitaram de um olhar atento e rigoroso para serem desqualificadas como verdadeiras demonstrações do quinto postulado de Euclides. Mas todas, das mais ingênuas às mais sofisticadas, continham sempre um raciocínio cíclico que escondia, dentro da argumentação lógica de sua demonstração, as verdades do próprio quinto postulado que se queria provar.

A suposta verdade sobre a existência de uma única paralela estava tão inserida no pensamento científico que era fácil usá-la sem se dar conta. São tantos os resultados obtidos como consequência direta da unicidade das paralelas, que até então eram inquestionáveis, como a simples existência de retângulos ou o fato de a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo ser dada pela soma de dois ângulos retos. Tais fatos eram usados, sem que se percebesse a dependência que tinham em relação ao quinto postulado, nas pretensas provas que acabavam sempre se tornando círculos viciosos de redundância lógica.

3. METODOLOGIA

Este estudo se baseou em uma pesquisa bibliográfica para discutir assuntos relacionados ao ensino e aprendizagem de conhecimentos matemáticos, em especial ao conteúdo relacionado à geometria.

Para Gil (2002, p. 44), pesquisa bibliográfica ...“é desenvolvida com base em material já elaborado, constituído principalmente de livros e artigos científicos”.

De posse das informações coletadas no acervo bibliográfico referenciado neste trabalho, uma discussão foi elaborada a fim de esclarecer a importância do estudo da geometria e tentar aproximá-la da realidade, visto que algumas pessoas

quando a estudam na educação básica a vê como uma vilã e talvez até, como uma parte menos interessante da matemática.

4. RESULTADOS E DISCUSSÕES

A não existência de uma prova do quinto postulado levou, assim, à consideração de que este axioma não é uma consequência lógica dos quatro anteriores. Substituindo-o, criam-se Novas Geometrias, tão boas e consistentes como a de Euclides. Os matemáticos János BOLYAI (1802-1860), Nikolai Ivanovich LOBACHEVSKY (1792-1856), Carl Friedrich GAUSS (1777-1855) e Georg Friedrich RIEMANN (1826-1866) lançaram as bases dessas Geometrias que são logicamente aceitas assim como a euclidiana. Por volta de 1820 já se conheciam os principais teoremas das Geometrias não Euclidianas, nome dado por Gauss. Muito embora Gauss não tenha publicado as suas conclusões e, em 1829 Lobachevsky e, em 1832 Bolyai publicaram seus trabalhos independentes um do outro sobre o assunto. A razão pela qual Gauss manteve em segredo suas descobertas, foi o fato de que a filosofia de Immanuel Kant (1724 – 1804) dominava a Alemanha da época e seus dogmas eram que as ideias da Geometria Euclidiana eram as únicas possíveis. Gauss sabia que essa ideia não era intocável, mas para não entrar em conflito com os filósofos da época resolveu manter-se em silêncio. Em 1829 ele escreveu o seguinte para um matemático alemão chamado Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846): “Não irei dedicar muitos de meus esforços para escrever algo publicável sobre esse assunto (Fundamentos da Geometria), pois tenho horror aos gritos histéricos que ouviríamos dos beócios se eu tornasse claro meus pensamentos sobre o assunto.”

Kant foi um filósofo prussiano considerado por muitos como o último grande filósofo dos princípios da era moderna. Depois de um longo período como professor secundário de geografia, começou em 1755 a carreira universitária ensinando Ciências Naturais. Em 1770 foi nomeado professor catedrático da Universidade de Königsberg, cidade da qual nunca saiu, levando uma vida monotonamente pontual e só dedicada aos estudos filosóficos. Realizou numerosos trabalhos sobre Ciência, Física, Matemática, etc.

Agora Bessel foi um matemático e astrónomo alemão. Sistematizou as funções de Bessel que foram descobertas por Daniel Bernoulli, este último membro da família Bernouilli, da Suíça, eles ocuparam um lugar ímpar na História da

Matemática. As funções de Bessel, a desigualdade de Bessel, os polinômios de Bessel, os filtros de Bessel, a transformada de Bessel, a cratera de Bessel e o asteróide 1552 Bessel foram batizados em sua honra.

Vários matemáticos passaram a trabalhar num estudo mais rigoroso da Geometria de Euclides, e a obra mais conhecida é “Fundamentos da Geometria” (1889) do matemático alemão David Hilbert. O sistema axiomático de Hilbert fixou os fundamentos da Geometria Plana e seus axiomas estão divididos em cinco grupos: incidência, ordem, congruência, continuidade e paralelismo. Neste sistema o terceiro postulado de Euclides, tornou-se uma definição e o quarto postulado um teorema.

Sobre Hilbert (1862 1943), pode-se dizer que foi um notável matemático e os tópicos de suas pesquisas são fundamentais em diversos ramos da Matemática, certamente está entre os maiores matemáticos do século XX.

A Geometria Neutra ou Geometria Absoluta é uma Geometria que omite o postulado das paralelas, isto é, admite todos os axiomas de Hilbert, exceto o de paralelismo. Com os axiomas da Geometria Neutra e negando a unicidade das paralelas do quinto postulado, surgem novas Geometrias.

Aos matemáticos interessados em demonstrar o axioma das paralelas via método do absurdo restavam duas opções:

- I) Supor que para qualquer ponto fora de uma reta dada é possível passar pelo menos duas retas paralelas a esta;
- II) Supor que não seja possível obter nenhuma paralela a reta dada.

Ao desconsiderar o axioma das paralelas utilizando o raciocínio acima, muitos matemáticos começaram a observar a viabilidade de novos modelos de Geometria em que se o caminho seguido fosse o primeiro, teríamos a chamada Geometria Hiperbólica também denominada Geometria de Lobachevsky em homenagem a Nicolai Lobachevsky um dos que ajudaram a criá-la e, caso o caminho seguido fosse o segundo, teríamos a chamada Geometria Elíptica, também chamada de Geometria Riemanniana em homenagem a Georg Riemann seu criador.

Partindo de um ponto, que apesar de ser fundamental não será esmiuçado neste trabalho, é possível sintetizar, sem antes mesmo do aprofundamento nos dois tipos principais de Geometrias não Euclidianas que estão intimamente ligadas ao conceito de curvatura de sua superfície particular. Então, de acordo com a natureza de sua curvatura específica há uma forma de se classificar um modelo geométrico a

partir de tal parâmetro. Assim, a Geometria Euclidiana possui curvatura nula, a Geometria Hiperbólica, possui curvatura negativa e a Geometria Elíptica apresentará curvatura positiva, como podem ser vistas na ilustração abaixo.

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

O estudo das Geometrias Não-Euclidianas, qualquer que seja ela, seja na educação básica ou no ensino superior é tão polêmico quanto o Quinto Postulado de Euclides, fato gerador de todo esse contencioso.

A despeito da corrente que engloba muitos pensadores e estudiosos rechaçar o papel técnico e mecanicista da Matemática, a verdade é que seu caráter cognitivo, indispensável ao progresso da humanidade, sobrepõe todas as críticas à sua aplicabilidade.

Esperamos com essa breve explanação sobre o tema ter alcançado o objetivo de tocar num assunto já corriqueiro para a comunidade acadêmica, mas ainda completamente desconhecido e intocado para aqueles que, um dia, estudaram Matemática em especial a Geometria na educação básica.

Hoje a maior parte dos livros didáticos vem com o conteúdo de Álgebra e Geometria adjacentes distribuídos em alguns capítulos dos livros, fato que não ocorrera no passado, eles iniciavam pela Álgebra e transcorriam toda aquela matéria e depois seguiam com os conteúdos de Geometria a partir dali até o fim do livro. Assim muitos alunos terminavam o ensino fundamental sem muitas vezes ter visto conceitos geométricos algum, e isso se arrastava no ensino médio, com essas distribuições de conteúdos nos livros da educação básica já se minimizou consideravelmente esses fatos.

Mas ainda assim, vários professores empurram enquanto podem o conteúdo de Geometria para o fim do ano, quando este deve ser dado junto da matéria Matemática, algumas secretarias de educação têm as matérias de Matemática e Geometria separadas em suas grades, o que ajuda sobremaneira a vencer esses empecilhos.

6. REFERÊNCIAS

ALMOULOUD, Saddo Ag, SILVA, Maria José Ferreira da, HARUNA, Nancy Cury Andraus. **Relato de experiência: Fundamentos metodológicos de formação de professores em Geometria.** Catanduva, SP, 2004.

ALVES, S. **A Geometria do Globo Terrestre**. In: Programa de Iniciação Científica da OBMEP, v 6. 2007.

ARCARI, I. **Um texto de Geometria Hiperbólica**. Dissertação de mestrado. Campinas, São Paulo, 2008.

ATIKE, Roberta Godoi. **Geometria**. Universidade de São Paulo. Instituto de Ciências Matemáticas e de Computação. São Carlos: USP, 2006. Disponível em: <http://www.icmc.sc.usp.br/rwik/geometria/apostila.pdf>. Acesso em: 21 de novembro de 2012.

BARBOSA, João Lucas Marques. **Publicações Matemáticas – Geometria Hiperbólica**. Rio de Janeiro: IMPA, 2002.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2ª edição, tradução de Elza F. Gomide. São Paulo: Editora Edgar Blücher, 1996.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Secretaria de Educação Fundamental. Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática. (3º e 4º ciclos do ensino fundamental). Brasília: MEC, 1998.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) - Parte III e Parte IV. Brasília: MEC, 1999.

BRASIL. **Ministério da Educação**. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais (Ensino Médio) + Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) - Ciência da Natureza, Matemática e suas Tecnologias e Ciências Humanas e suas Tecnologias. Brasília: MEC, 2002.

CARMO, Manfredo do. **Elementos de Geometria Diferencial**, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.

CARMO, Manfredo do. **Geometria Riemanniana**, Projeto Euclides, IMPA, Rio de Janeiro.

COSTA, Celso, CARDIM, Nancy. **Tópicos de Aritmética, Álgebra e Geometria para o Ensino Médio**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

COSTA, Celso, FIGUEIREDO, Luiz Manoel Silva de. **Instrumentação para o Ensino da Geometria**. Rio de Janeiro. UFF/CEP, 2007.

COUTINHO, Lázaro. **Convite às Geometrias não Euclidianas**. 1ª ed. São Paulo. Interciência, 2001. 116 p.

DEVITO, André et al. **Geometrias não Euclidianas**. Universidade de Campinas. Instituto de Matemática, Estatística e Computação Científica. Campinas. Campinas,

2006. Disponível em: http://www.ime.unicamp.br/~eliane/ma241/trabalhos/nao_euclidiana. Acesso em: 11 de dezembro de 2012.

EVES, Howard. **Introdução à História da Matemática**. São Paulo: Editora Unicamp, 2004.

GAIOWSKI, Antônio Osny, BASSOI, Tânia Stella. **A inserção das Geometrias não Euclidianas no currículo da Educação Básica no estado do Paraná**. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/848-4.pdf>. Acesso em: 20 de janeiro de 2013.

Gil, Antônio Carlos. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5. ed. São Paulo: Atlas, 1999.

GREENBERG, M. **Euclidean and Non-Euclidean Geometries**, Freeman and Co., San Francisco, 1974.

KALEFF, A. M. M. R. **Atividades Introdutórias às Geometrias não Euclidianas: o exemplo da Geometria do Táxi**. Boletim – GEPEM, Rio de Janeiro, n.44, p. 11- 42. 2004.

KALLEF, Ana Maria Martensen Roland. **Tópicos em Ensino de Geometria**. Rio de Janeiro: UFF, 2008.

LIMA, Elon Lages. **Revista Matemática Universitária**. n.6. Rio de Janeiro: SBM, dezembro de 1987, pp 25 – 48.

MOREIRA, Ana Cláudia da Silva. **Geometrias sobre a axiomática de Hilbert**. Campinas, 2006. Disponível em: <http://www.ime.unicamp.br/eliane/ma241/trabalhos/sobhilbert.pdf> Acesso em: 20 de janeiro de 2013.

OLIVERO, Mário. **História da Matemática através de problemas**. Rio de Janeiro: UFF, 2006.

PETIT, J.P. **As aventuras de Anselmo Curioso**. Os mistérios da Geometria. Lisboa: Dom Quixote, 1982.

SILVA, Sergio. **A Polêmica sobre o Axioma das Paralelas**. Disponível em: http://www.ginasiomental.com/artigos/pol_paral.pdf. Acesso em: 23 de novembro de 2012.

STRUIK, D. J. **História Concisa das Matemáticas**. Ciência Aberta. Gradiva, 1997.